Analiza matematyczna 1 (2020/2021)

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań[‡] obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek. Na ćwiczeniach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem (*). Zadania oznaczone literą są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy zadań umieszczono zestawy zadań z egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także z egzaminu na ocenę celującą.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca

---

Lista pierwsza

---

1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:
(a) „Wrocław był stolicą Polski”; (b) „liczba 333333 jest podzielna przez 9”;
(c) „$a^2 + b^2 = c^2$”; (d) „trójkąt o bokach 5, 7, 13 jest ostrokątny”;
(e) „$2^5 \geqslant 32$”; (f) „$\Delta = b^2 - 4ac$”.

2. Napisać zaprzeczenia zdań:
(a) „piję piwo i oglądam mecz w TVN”;
(b) „kwadrat nie jest pięciokątem”;
(c) „przez Poznań przepływa Odra lub Warta”;
(d) „jeśli funkcja f jest rosnąca, to funkcja $-f$ jest malejąca”;
(e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 oraz przez 3”;
(f) „czworokąt jest równoległobokiem albo ma przekątne różnej długości”.

3. Ocenić prawdziwość zdań złożonych:
(a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$”;
(b) „$(-1)^{44} = -1$ lub 2018 jest liczbą parzystą”;
(c) „funkcja $g(x) = \sin x + \cos(\pi/12)$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ – nieparzysta”;
(d) „jeżeli czworokąt jest rombem, to jego przekątne przecinają się pod kątem prostym”;
(e) „liczba 2016 jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z jej końcowych trzech cyfr jest podzielna przez 8”;
(f) „Ziemia ma kształt kuli albo funkcja $f(x) = \sin x$ jest okresowa”.

[‡]Zadania zaczerpnięto z książek: *Analiza matematyczna 1 (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, *Wstęp do analizy i algebry* oraz *Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami.*

4. Używając tylko kwantyfikatorów, spójników logicznych oraz relacji $=$, $\neq$, $<$, $\leqslant$ zapisać stwierdzenia:
(a) funkcja f nie jest rosnąca na przedziale $[0, 1]$;
(b) $x \in [-1, 2)$;
(c) układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań;
(d) równanie $x^7 + 3x^5 + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste;
(e) liczba 2017 jest pierwsza.

5. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:
(a) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^x = 27$; (b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; (c) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} x^2 + y^3 = 0$;
(d) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} xy = 0$; (e) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} (y \leqslant x) \vee (y > x)$; (f) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} \sin x + \cos(x + y) = 0$.

6. Dla par zbiorów A, $B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c:
(a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$; (b) $A = (-\infty, 3)$, $B = [-1, \infty)$; (c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Wskazać te pary A, B, dla których $A \subset B$.

7. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:
(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 5}$; (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+1}$; (c) $f(x) = \sqrt{81 - x^4}$; (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$.

8. Korzystając z definicji pokazać, że podane funkcje są parzyste lub nieparzyste:
(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; (b) $f(x) = |x^3 + x|$; (c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 2x}$.

9. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych przedziałach:
(a) $f(x) = 2 + 5x$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$.

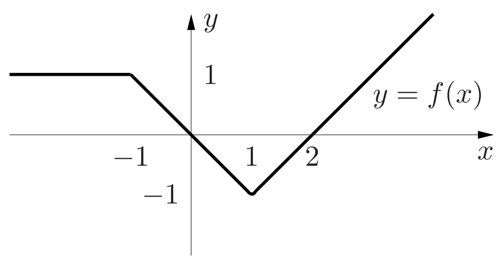
10. Niech f będzie funkcją monotoniczną i dodatnią na przedziale. Uzasadnić, że funkcje $(-f)$, f^2, $1/f$ też są monotoniczne. Korzystając z powyższego naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych przedziałach:
(a) $\dfrac{1}{1+x^4}$, $(-\infty, 0)$; (b) $\dfrac{-1}{1+2^x}$, $(-\infty, \infty)$; (c) $\dfrac{1}{(2+\cos x)^2}$, $(0, \pi)$; (d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$, $(4, \infty)$.

Lista druga

---

11. Podać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:
(a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 2$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; (d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

12. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = f(x) + 5$; (b) $y = f(x+2)$; (c) $y = -f(x)$; (d) $y = f(-x)$;
(e) $y = f(x)/2$; (f) $y = f(3x)$; (g) $y = |f(x)|$; (h) $y = f(|x|)$.

13. Rozwiązać równania:

(a) $x^3 + 2x^2 + x = 0$; (b) $x^3 + x^2 + 2x = 0$; (c) $x^4 - 16 = 0$;
(d) $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$; (e) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0$; (f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$.

14. Rozwiązać nierówności:

(a) $(x-2)\left(x^2+2x-3\right) > 0$; (b) $\left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-6\right) \leqslant 0$; (c) $\left(4x^2-25\right)^2 - (2x+5)^2 > 0$;
(d) $x^3 - 4x^2 + 4x < 0$; (e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 \geqslant 0$; (f) $x^4(x-1)^3(x+2)^2(x-2) \leqslant 0$.

15. Rozwiązać równania:

(a) $\dfrac{4x-6}{2x^2-x+4} = 0$; (b) $\dfrac{3}{4x-6} + \dfrac{2}{2x-3} = \dfrac{1}{5}$; (c) $\dfrac{9x}{3x-1} = \dfrac{3}{3x+1} + 2$;
(d) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{21}{x^2-x-2}$; (e) $\dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{3}{x+1} + 1$; (f) $\dfrac{x-4}{x-2} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x-21}{x^2+x-6}$.

16. Rozwiązać nierówności:

(a) $\dfrac{x^2-3x}{x+3} < 0$; (b) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \geqslant 0$; (c) $2 + \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x}$;
(d) $\dfrac{x^2+5x}{x-3} > x$; (e) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} > 0$; (f) $\dfrac{-x^2+2x+4}{x-2} \leqslant 1$.

Lista trzecia

---

17. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x + x^3$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(0, \infty)$.

18. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; (b) $f(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$, $(-2 \leqslant x \leqslant 0)$; (c) $f(x) = 3^{x+1}$;
(d) $f(x) = \log(x+3)$; (e) $f(x) = -x^4$, $(x \leqslant 0)$; (d) $f(x) = x^2 - 4x$, $(x \leqslant 2)$.

19. (P) Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

(a) $\log_6 3 + \log_6 12$; (b) $\log_3 18 - \log_3 2$; (c) $9 \log_6 \sqrt[3]{36}$;
(d) $3 \log_2 3 \cdot \log_3 4$; (e) $3 \log_4 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \log_4 3 + 3 \log_4 2 - \log_4 6$; (f) $\dfrac{\log_2 54 - \log_2 6}{\log_2 27 - \log_2 9}$.

20. Rozwiązać równania lub nierówności:

(a) $2^{x+2} = 3^{2x+1}$; (b) $2e^x - 5 \cdot e^{-x} = 9$;
(c) $5^x \cdot 2^{x+1} \leqslant 5^{2x} \cdot 2^{2x}$; (d) $e^x - e^{-x} > 2$.

21. Rozwiązać równania:

(a) $4 \log_2 x = \log_2 81$; (b) $\log_4(x+4) - \log_4(x-1) = 2$;
(c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}} x = -2$; (d) $\log_2\left(x^2-6\right) = 3 + \log_2(x-1)$;
(e) $2 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{3}}(6x-1) = 0$; (f) $\log x + \log(x-1) = \log(3x+12)$.

22. Rozwiązać nierówności:

(a) $\log_5(5-3x) > 1$;

(b) $\log(3x-1) - \log(x-1) > \log 2$;

(c) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+1) < 1 + \log_{\frac{1}{5}}\left(16-x^2\right)$;

(d) $\log_2(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > 1$;

(e) $\dfrac{2}{\log_{\frac{1}{3}} x} \geqslant 1 - \log_3 x$;

(f) $\ln x + \dfrac{1}{\ln x} > 0$.

Lista czwarta

---

23. (P) Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

(a) $y = \sin 3x$; (b) $y = \sin \dfrac{x}{2}$; (c) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right)$;

(d) $y = 1 + \sin x$; (e) $y = \dfrac{1}{2}\sin x - 1$; (f) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

24. Narysować wykresy funkcji:

(a) $y = |\cos x|$; (b) $y = \sin x - 2|\sin x|$; (c) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$; (d) $y = \dfrac{|\sin 2x|}{\cos x}$.

25. Podane funkcje wyrazić za pomocą sinusa i cosinusa wielokrotności kąta α:

(a) $\sin^2\alpha$; (b) $\cos^2\alpha$; (c) $\sin^4\alpha$; (d) $\cos^4\alpha$.

26. Rozwiązać równania:

(a) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$; (b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\operatorname{tg} x = 1$;

(d) $\sin x = -\sin 2x$; (e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; (f) $\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} x$;

(g) $\cos 4x = \sin\dfrac{x}{2}$; (h) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; (i) $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x$.

27. Rozwiązać równania:

(a) $\sin^2 x + \cos x \sin x = 0$; (b) $\sin x - 2 = \cos 2x$; (c) $\cos 4x = 2 - 3\sin 2x$;

(d) $\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x = -4$; (e) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$; (f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

28. Rozwiązać nierówności:

(a) $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$; (c) $\operatorname{tg} x < -1$; (d) $\operatorname{ctg} x > -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

(e) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \geqslant \sqrt{3}$; (f) $2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) < -1$; (g) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) > -1$; (g) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

29. (P) Podaj wartości wyrażeń:

(a) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\dfrac{1}{2}$; (b) $\operatorname{arc\,ctg} 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} 1$; (c) $\dfrac{\arcsin\left(-\sqrt{3}/2\right)}{\arcsin 1}$; (d) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$.

30.* Obliczyć:

(a) $\sin(\arccos 1/3)$; (b) $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg} 5)$; (c) $\operatorname{tg}(\arccos 3/5)$; (d) $\sin(\operatorname{arc\,tg} 2)$.

31. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \arcsin(2x+1)$; (b) $f(x) = \arccos\left(x^2 + \dfrac{3}{4}\right)$; (c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x+1}$; (d) $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} 2^x$.

Lista piąta

32. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

(a) $a_n = \dfrac{2+\sin n}{3-2\cos n}$; (b) $a_n = \sqrt[n]{3^n-1}$; (c) $a_n = 2-\sqrt{n}$;

(d) $a_n = \sqrt{n+8}-\sqrt{n+3}$; (e*) $a_n = \dfrac{1}{4^1+1}+\dfrac{1}{4^2+2}+\ldots+\dfrac{1}{4^n+n}$.

33. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

(a) $a_n = 3^{n+1}-2^n$; (b) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$; (c) $a_n = \dfrac{7^n}{n!}$;

(d) $a_n = \sqrt{n^2-6n+10}$; (e) $a_n = \dfrac{4^n}{2^n+3^n}$; (f) $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$.

34. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{n+5} = -1$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty$.

35. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+4}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{2n^2-1}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+1}{n-2n^3}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3(3n+1)^5}{(6n^2+2n+1)^4}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{27}-\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-4^n}{5^n-4^{n+2}}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)\,n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$; (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3+1}}$.

36. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+(-1)^n}{5n+2}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left\lfloor n\sqrt{12}\right\rfloor}{\left\lfloor n\sqrt{3}\right\rfloor}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos 2n}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^{2n+1}+3^{3n+2}}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

37. Obliczyć granice z liczbą e:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{5n}\right)^n\left(\dfrac{5n+1}{2n}\right)^n$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\ln n}{\ln n}\right)^{\ln n^2}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n-(n+2)^n}{(n+2)^n-(n+3)^n}$.

38. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4-3n^3-2n^2-1\right)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n-3^n)$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$.

Lista szósta

---

39. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^3=8$; (b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x}=0$; (c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$.

40. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x^2-x+1}$; (b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; (d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^4-16}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^3+1\right)^7}{(x+1)^9\left(2x^2+1\right)^6}$; (f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$; (g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)$; (h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2}{4^x-2}$;

(i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\operatorname{tg}^2x+1}{\operatorname{tg}^2x+5}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x}{1-\cos x}$; (k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2}{x+1}$; (l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

41. Obliczając granice jednostronne obliczyć, czy istnieją granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sgn}x$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$; (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$.

42. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}=0$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\cos 2x}{x^2}=0$.

43. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arc\,tg}2x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$; (h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x+2}$; (i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\pi-x^e}{x-1}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0}[1+\operatorname{tg}(2x)]^{\operatorname{ctg}x}$; (l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[6]{1-x}}{x}$;

44. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; (b) $f(x)=\dfrac{x^{11}+1}{(x-1)^{10}}$; (c) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$;

(d) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+2}{x+1}$; (e) $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x-2^x}$; (f) $f(x)=\dfrac{2x^2+\sin x}{x}$;

(g) $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x-1}$; (h) $f(x)=x-\operatorname{arc\,tg}x$; (i) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin x-1}$.

Lista siódma

---

45. Dobrać parametry $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na $\mathbb{R}$:

(a) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla } x<0,\\ a+b\sin x & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant\pi/2,\\ 1 & \text{dla } x>\pi/2;\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}+1 & \text{dla } x<-1,\\ b-2x & \text{dla } x\geqslant -1;\end{cases}$ (c) $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & \text{dla } x<-1,\\ 2x & \text{dla } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^3+bx & \text{dla } x>0.\end{cases}$

Naszkicować wykres funkcji z przykładu (a).

46. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2+x-2} & \text{dla } x\neq 1,\, 2\\ 1 & \text{dla } x=1,\\ 1/4 & \text{dla } x=2;\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0;\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\left(x^2\right)-\ln\left(x^2+1\right)} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0;\end{cases}$ (d) $f(x)=\begin{cases}1-\cos\dfrac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 0 & \text{dla } x=0.\end{cases}$

47. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

(a) $x^3+6x-2=0,\ [0,1]$; (b) $x\sin x=7,\ \left[2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right]$; (c) $\ln(x+2)+x=0,\ [-1,0]$;

(d) $\left(\sqrt{x}+1\right)^7=2-x,\ [0,1]$; (e) $3^x+x=3,\ [0,1]$; (f) $2^x+8^x=11,\ [1,2]$.

Wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania (a) z dokładnością 0.125.

(*) Dlaczego jedynym rozwiązaniem równania $x+\log_2 x+3^x=12$ jest $x=2$?

Lista ósma

---

48. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

(a) $f(x)=x^4\ (x\in\mathbb{R})$; (b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\ (x\neq 1)$; (c) $f(x)=\sqrt{x}\ (x>0)$; (d) $f(x)=\sin 2x\ (x\in\mathbb{R})$.

49. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x)=\left|x^2-x\right|,\ x_0=1$; (b) $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{sgn}(x),\ x_0=0$; (c) $f(x)=\min\left\{x^2,4\right\},\ x_0=2$.

Naszkicować wykresy tych funkcji.

50. Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na wspólnym na przedziale, obliczyć pochodne funkcji:

(a) $y=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$; (b) $y=\dfrac{f\left(x^2\right)}{x}$; (c) $y=e^{-x}f\left(e^x\right)$;

(d) $y=f(x)\cos g(x)$; (e) $y=\sqrt{f^2(x)-g^2(x)}$; (f) $y=\operatorname{arc\,tg}\left[f(x)g(x)\right]$;

(g) $y=\ln\dfrac{f(x)}{g(x)}$; (h) $y=\operatorname{tg}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; (i) $y=f(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

51. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

(a) $3\sin x+\operatorname{ctg}x$; (b) $e^x\left(x^2-x+1\right)$; (c) $\dfrac{x^2+2}{x-2}$; (d) $e^{-x}(3x+1)^2$;

(e) $\ln\left(x^2+1\right)\operatorname{tg}\sqrt{x}$; (f) $e^{1/x}\operatorname{arc\,tg}(3-x)$; (g) $\ln\left(\cos^2 x+1\right)$; (h) $\sqrt{\arccos\left(x^2\right)}$;

(i) $\dfrac{\sqrt{5}}{\left(x^2+1\right)^3}$; (j) $\dfrac{3^{\sin^2 x}}{2^{\cos^2 x}}$; (k) $\left(e^{-2x}+1\right)^3$; (l) $(\sin x)^x\ (0<x<\pi)$;

(m) $(\arcsin x+\arccos x)^2$; (n) $\ln(2x)+\ln\dfrac{3}{x}$; (o) $\dfrac{\ln 2019}{x^2+1}$; (p) $e^5\sin 2x+\sqrt{\pi}\cos 3x$.

52.* Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $\left(f^{-1}\right)'(y_0)$, jeżeli:

(a) $f(x)=x+\ln x,\ y_0=e+1$; (b) $f(x)=\cos x-3x,\ y_0=1$;

(c) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{x},\ y_0=3$; (d) $f(x)=x^3+3^x,\ y_0=4$.

53. **(P)** Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, $(1, f(1))$; (b) $f(x) = \ln\left(x^2 + e\right)$, $(0, f(0))$; (c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

(d) $f(x) = \sqrt{2^x + 1}$, $(3, f(3))$; (e) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $\left(\sqrt{2}, f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; (f) $f(x) = e^{1+(1/x)}$, $(x_0, 1)$.

54. (a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

(b) Wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox.

(c) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

(d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

(e) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy.

55.* (a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200\,\mathrm{m}$. Kąt przy wierzchołku tego trójkata, zmierzony z dokładnością $0.01\,\mathrm{rad}$ wynosi $\pi/3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

(b) Średnica kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością $0.01\,\mathrm{mm}$, wynosi $6\,\mathrm{mm}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnośścią można obliczyć objętość tej kuli?

(c) Do szybu puszczono swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością $0.1\,\mathrm{s}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł $4.1\,\mathrm{s}$? Przyjąć $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$.

(d) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

Lista dziewiąta

---

56. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2} x}{\ln x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$; (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} \operatorname{arc\,ctg} x$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$; (h) $\lim\limits_{x\to \pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{x^2}\right)$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; (k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x}\right)$; (l) $\lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$;

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} x\right)^x$; (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x)^{\ln x}$; (o) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

57. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$; (b) $f(x) = \sin x - \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$; (c) $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$;

(d) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$; (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$; (f) $f(x) = xe^{-3x}$;

(g) $f(x) = x \ln^2 x$; (h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; (i) $f(x) = 2^{x+1} - 4^x$.

Lista dziesiąta

58. Obliczyć drugą pochodną funkcji:

(a) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; (b) $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$; (c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

(d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; (e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; (f) $f(x) = x^3 \ln x$.

59. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2$; (b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; (c) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$;

(d) $f(x) = (x+1)e^{-x}$; (e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; (f) $f(x) = \left|x^2 - 5x - 6\right|$;

(g) $f(x) = x \ln x$; (h) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$; (i) $f(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

60. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x,\ [1,5]$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2},\ [-2,2]$;

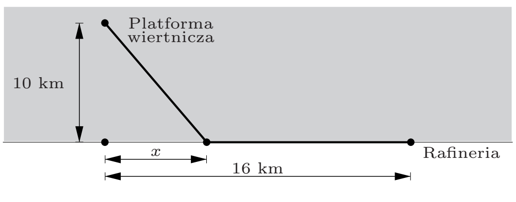
(c) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{9-x}$; (d) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|},\ [-1,4]$;

(e) $f(x) = 1 - \left|9 - x^2\right|,\ [-5,1]$; (f) $f(x) = \sin^3 x - 6 \sin x,\ [-\pi/2, \pi/2]$;

(g) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$; (h) $f(x) = \dfrac{\cos x}{5 + 4 \sin x}$.

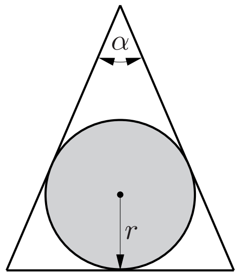
61. (a) Jakie wymiary powinna mieć prostokątna działka podzielona na trzy parcele o powierzchniach $600\,\mathrm{m}^2$, $400\,\mathrm{m}^2$ i $200\,\mathrm{m}^2$ (rys.) tak, aby łączna długość ogrodzenia tych parcel była najmniejsza?

(b) Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od prostoliniowego brzegu. Ropa z platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

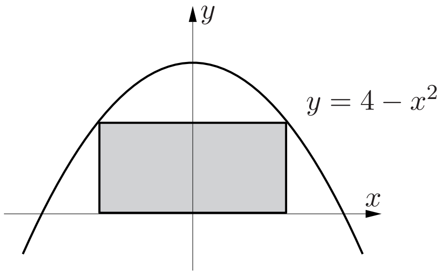


(c) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność $22.50\,\mathrm{m}^3$ i kwadratową podłogę. Koszt $1\,\mathrm{m}^2$ blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

(d) Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkata równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



(e) W parabolę o równaniu $y = 4 - x^2$ wpisano prostokąt, w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.



Lista jedenasta

---

62. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

(a) $\int \left(x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x}\right) dx$; (b) $\int \frac{(1-x)\,dx}{1+\sqrt{x}}$; (c) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$;

(d) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos x - \sin x}$; (e) $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$; (f) $\int e^{-x} \cdot 3^{2x}\,dx$.

63. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int xe^{-3x}\,dx$; (b) $\int (x+1)^2 e^x\,dx$; (c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}\,dx$; (d) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

(e) $\int x^2 \sin x\,dx$; (f) $\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; (g) $\int \ln(x+1)\,dx$; (h) $\int \arccos x\,dx$;

(i) $\int e^{2x} \sin x\,dx$; (j) $\int \sin x \sin 3x\,dx$; (k) $\int \sin 3x \cos x\,dx$; (l) $\int \cos x \cos 5x\,dx$;

(m) $\int \sin^2 x\,dx$; (n) $\int \cos^4 x\,dx$; (o) $\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx$; (p*) $\int x \sin xe^x\,dx$.

64. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

(a) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; (b) $\int \frac{\sqrt{1+4x}}{x}\,dx$; (c) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$; (d) $\int x \sin\left(x^2+4\right)\,dx$;

(e) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\,x}$; (f) $\int (5-3x)^{10}\,dx$; (g) $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; (h) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

(i) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; (j) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; (k) $\int \frac{5\sin x\,dx}{3-2\cos x}$; (l) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Lista dwunasta

65.* Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny przedziału całkowania obliczyć:

(a) $\int\limits_{-2}^{1} (2x-1)\,dx$; (b) $\int\limits_{2}^{3} x^2\,dx$.

Wskazówka. Zastosować odpowiednio wzory

(a) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, (b) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

66. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

(a) $\int\limits_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; (b) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x-1}{x+1}\,dx$; (c) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$;

(d) $\int\limits_{-1}^{2} x\left(1+x^3\right)dx$; (e) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$; (f) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

67.* Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne uzasadnić równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)\right]=\frac{2}{\pi}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+n}+\sqrt{2+n}+\ldots+\sqrt{n+n}\right)\right]=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

68. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y=2x-x^2,\ x+y=0$; (b) $y=x^2,\ y=x^2/2,\ y=3x$; (c) $y=1/x^2,\ y=x,\ y=4$;

(d) $y=1,\ y=\frac{4}{x^2+1}$; (e) $y=2^x,\ y=2,\ x=0$; (f) $y=\sin x,\ y=1/2,\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$;

(g) $y=2\sqrt{x},\ y=\sqrt{5-x},\ y=0$; (h) $yx^4=1,\ y=1,\ y=16$; (i) $y^2=-x,\ y=x-6,\ y=-1,\ y=4$.

69. Metodą całkowania przez części obliczyć całki oznaczone:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} xe^{-x}\,dx$; (b) $\int\limits_{0}^{1} x^2e^{2x}\,dx$; (c) $\int\limits_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

(d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$; (e) $\int\limits_{0}^{\pi} x(1+\cos x)\,dx$; (f) $\int\limits_{0}^{1}\arcsin x\,dx$.

70. Obliczyć całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

(a) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin x e^{\cos x}\,dx,\ \cos x=t$; (b) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}},\ 1+x=t$;

(c) $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1+x}\,dx,\ \sqrt{1+x}=t$; (d) $\int\limits_{1}^{e}\ln x\,dx,\ \ln x=t$;

(e) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)},\ x=t^2$; (f) $\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx,\ x=3\sin t$; (g) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\ln 3}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}},\ e^x=t$.

Lista trzynasta

71. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ x=0,\ y=0;$ (b) $4y=x^2,\ y=\dfrac{8}{x^2+4};$ (c) $y=\ln x,\ x=e,\ y=-1;$

(d) $y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x\ (0<x<\pi/2);$ (e) $y=\sqrt{9-x^2},\ y=1,\ y=2;$ (f) $y=2^x,\ y=4^x,\ y=16.$

72. Obliczyć długości krzywych:

(a) $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1},\ \ 2\leqslant x\leqslant 3;$ (b) $y=x^2,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1;$ (c) $y=2\sqrt{x^3},\ \ 0\leqslant x\leqslant 11;$

(e) $y=e^x,\ \ \dfrac{1}{2}\ln 2\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\ln 3;$ (g) $y=\dfrac{x^5}{10}+\dfrac{1}{6x^3},\ \ 1\leqslant x\leqslant 2;$ (h) $y=1-\ln\cos x,\ \ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}.$

73. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

(a) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2x-x^2,\ Ox;$ (b) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\sqrt{5},\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}},\ Oy;$

(c) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant\operatorname{tg} x,\ Ox;$ (d) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\ Oy;$

(e) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^3,\ Oy;$ (f) $T\colon 1\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x},\ Oy;$

(g) $T\colon 1\leqslant x\leqslant 4,\ \dfrac{4}{x}\leqslant y\leqslant 5-x,\ Ox;$ (h) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\sin x+\cos x,\ Ox;$

(i) $T\colon 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\sin x,\ y=2;$ (j) $T\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x-x^2,\ x=2.$

74. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów funkcji f wokół wskazanych osi:

(a) $f(x)=\cos x,\ \ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ \ Ox;$ (b) $f(x)=\sqrt{4+x},\ \ -4\leqslant x\leqslant 2,\ \ Ox;$

(c) $f(x)=\ln x,\ \ 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\ \ Oy;$ (d) $f(x)=|x-1|+1,\ \ 0\leqslant x\leqslant 2,\ \ Oy;$

(e) $f(x)=\sqrt{4-x^2},\ \ -1\leqslant x\leqslant 1,\ \ Ox;$ (f) $f(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{x}{3}\right),\ \ 1\leqslant x\leqslant 3,\ \ Ox;$

(g) $f(x)=\dfrac{x-1}{9},\ \ 1\leqslant x\leqslant 10,\ \ Oy;$ (h) $f(x)=\dfrac{x^2}{2},\ \ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{3},\ \ Oy.$

75. (a) Wg prawa Hooke'a wydłużenie sprężyny jest wprost proporcjonalne (współczynnik k) do siły rozciagającej. Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości l rozciągnąć do długości L.

(b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D=2\,\mathrm{m}$, a długość $L=6\,\mathrm{m}$. Obliczyć pracę, jaką potrzeba wykonać, aby opróżnić zapełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Gęstość wody $\gamma=1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

76. (a) Punkt materialny zaczął poruszać się prostoliniowo z prędkością początkową $v_0=10\,\mathrm{m/s}$ i przyspieszeniem $a_0=2\,\mathrm{m/s^2}$. Po czasie $t_1=10\,\mathrm{s}$ punkt ten zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1=-1\,\mathrm{m/s^2}$. Znaleźć położenie punktu po czasie $t_2=20\,\mathrm{s}$ od chwili rozpoczęcia ruchu.

(b) Dwie cząstki elementarne położone w odległości $d=36$ zaczynają zbliżać się do siebie z prędkościami odpowiednio $v_1(t)=10t+t^3$, $v_2(t)=-6t$, gdzie $t\geqslant 0$. Po jakim czasie nastąpi zderzenie tych cząstek?

Lista czternasta

77. Obliczyć całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7}$; (b) $\int \frac{dx}{x+5}$; (c) $\int \frac{5\,dx}{(2-7x)^3}$; (d) $\int \frac{8\,dx}{9x+20}$.

78. Obliczyć całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; (b) $\int \frac{(6x+3)\,dx}{x^2+x+4}$; (c) $\int \frac{(4x+2)\,dx}{x^2-10x+29}$; (d) $\int \frac{(x-1)\,dx}{9x^2+6x+2}$.

79. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)}$; (b) $\int \frac{x^2\,dx}{x+1}$; (c) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$; (d) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-9}$;

(e) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; (f) $\int \frac{(4x+1)\,dx}{2x^2+x+1}$; (g) $\int \frac{2\,dx}{x^2+6x+18}$; (h) $\int \frac{dx}{x(x^2-4)}$;

(i) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{x^2-4x+20}$; (j) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; (k) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$; (l) $\int \frac{x\,dx}{x^4-1}$.

80. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \sin^3 x\,dx$; (b) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$; (c) $\int \cos^4 x\,dx$;

(d) $\int \sin^3 x \cos^6 x\,dx$; (e) $\int \cos^2 x \cos 2x\,dx$; (f*) $\int \sin^2 2x \sin^2 x\,dx$.

81. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$; (b) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$; (c) $\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$;

(d) $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x}$; (e) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x}$; (f) $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^3 x}$;

(g) $\int \frac{dx}{\sin x}$; (h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; (i) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$.

Tematy dodatkowe (Mechaniczno-Energetyczny)

1. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n :

(a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$;

(c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$; (d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

2. Napisać wzory Maclaurina z n-tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

(a) $f(x) = \sin \dfrac{x}{3}$; (b) $f(x) = \cosh x$; (c) $f(x) = \cos x$; (d) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

3. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

(a) $\operatorname{tg} x \approx x, \ |x| \leqslant \dfrac{\pi}{12}$; (b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2, \ |x| \leqslant 0.1$;

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}, \ |x| \leqslant 0.25$; (d) $\ln(1-x) \approx -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}, \ |x| < 0.1$.

4. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

(a) $1/e$ z dokładnością 10^{-3}; (b) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3};

(c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4}; (d) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5}.

5. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

(a) $f(x) = x(x-1)(x-3)$; (b) $f(x) = xe^{-x}$; (c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+12}$;

(d) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$; (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; (f) $f(x) = x - \dfrac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$;

(g) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{8}\sin 2x$; (h) $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; (i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

6. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

(a) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$; (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

(d) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$; (e) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$; (f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

(g) $f(x) = xe^{2x}$; (h*) $f(x) = \sin x + \sin 3x$; (i) $f(x) = x^2 \ln x$.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $y = \ln x$, $\quad x = e^2$, $\quad y = -1$. Sporządzić rysunek.

2. Metodą podstawiania obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$.

3. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+9}-n}{\sqrt{n^2+4}-n}$.

4. W przedziale $[-3,4]$ wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\sin \pi x}$.

6. Dobrać parametry p, q tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ x^2+px+q & \text{dla } 0 < x \end{cases}$ miała pochodną w punkcie $x_0 = 0$. Narysować wykres otrzymanej funkcji.

Zestaw B

1. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{(4x+6)\,dx}{x^2+4x+13}$.

3. Wyznaczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x^5)}{\sin(2x^2)\sin(3x^3)}$.

4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ wokół osi Ox.

5. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 \ln x$.

6. Wyznaczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)(n+1)!}{n^2\,(n!+4)}$.

Zestaw C

1. Obliczyć całkę $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$.

2. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = (x-3)e^x$.

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez krzywe: $y = 3x^2 - 6x$, $y = 6 + 3x - 3x^2$. Sporządzić rysunek.

4. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$, która jest prostopadła do prostej $x + 2y - 3 = 0$.

5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{n^2+3n+1}$.

6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$.

Zestaw D

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykres funkcji $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ oraz prostą $y = 1/2$. Sporządzić rysunek.

2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = (2-x)e^{2x}$.

3. Obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+25}$.

4. Pokazać, że równanie $x + \ln x - 2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.'

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)\left(3^{n+1}+2\right)}{6^n+5}$.

6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x-1}}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Obliczyć granicę ciągu $a_n = n\left(n - \sqrt{n^2-1}\right)$.

2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-2}$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = \left(x^2+2x-1\right)e^{-x}$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, wykresem paraboli $y = x^2+3$ i styczną do niej w punkcie o odciętej $x_0 = 3$. Sporządzić rysunek.

5. Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?

6. Podstawiając $\operatorname{arc\,tg} x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\displaystyle\int \frac{\ln\left(2\operatorname{arc\,tg} x\right)\,dx}{1+x^2}$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw B

1. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\dfrac{x^2+x+4}{x^3+4x}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x^2+2x+1}{2x-1}$ oraz starannie go naszkicować.

3. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \dfrac{1}{2^n\left(\sqrt{2^{2n}+1}-2^n\right)}$.

5. Obliczyć granicę $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} 2x \ln x$.

6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji: $y = 0$, $y = \ln x$, $y = \ln(1-x)$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{n\,(n+1)} - n$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = \left(x^2 - 6x + 2\right) e^x$ jest jednocześnie malejąca i wklęsła.

4. Narysować i obliczyć pole obszaru ograniczonego osią Ox, wykresem funkcji $y = x^3$ i styczną do niego w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.

5. Z kawałków blachy w kształcie koła o promieniu R wycinamy prostokątne podkładki. Wyznaczyć ich wymiary tak, aby odpady były najmniejsze.

6. Podstawiając $\sin x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\int \sin x \cos x \operatorname{arc\,tg} \sin x \, dx$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw D

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln(\operatorname{tg} x)$.

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $g(x) = \dfrac{3x^2+4x-5}{2-3x}$ oraz starannie go naszkicować.

3. Obliczyć granicę ciągu $y_n = 3n\left(\sqrt{4n^2-1} - 2n\right)$.

4. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{1}{x}$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła.

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

6. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\dfrac{6x}{4-9x^2}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

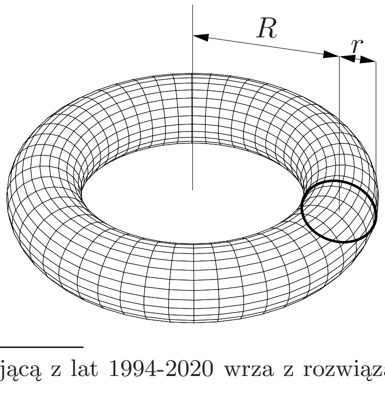
Egzamin na ocenę celującą (luty 2016 r.) §

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej n rozwinięcie dziesiętne $\sqrt{n}$ zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.

2. Jakie wartości może przyjąć granica $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f\left(x^2\right)}{f(x)}$, gdy f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,1)$ i dodatnią na $(0,1)$?

3. Znaleźć wielomian, który tylko w -1 i 2 ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w 0 ma punkt przegięcia.

4. Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a,b]$ $(a \geqslant 0)$. Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru $\{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ wokół osi Oy. Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół osi oddalonej o R $(R > r)$ od jego środka.



§Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat 1994-2020 wrza z rozwiązaniami można znaleźć w książce „*Studencki konkurs matematyczny*”.